

Leçon 6.1

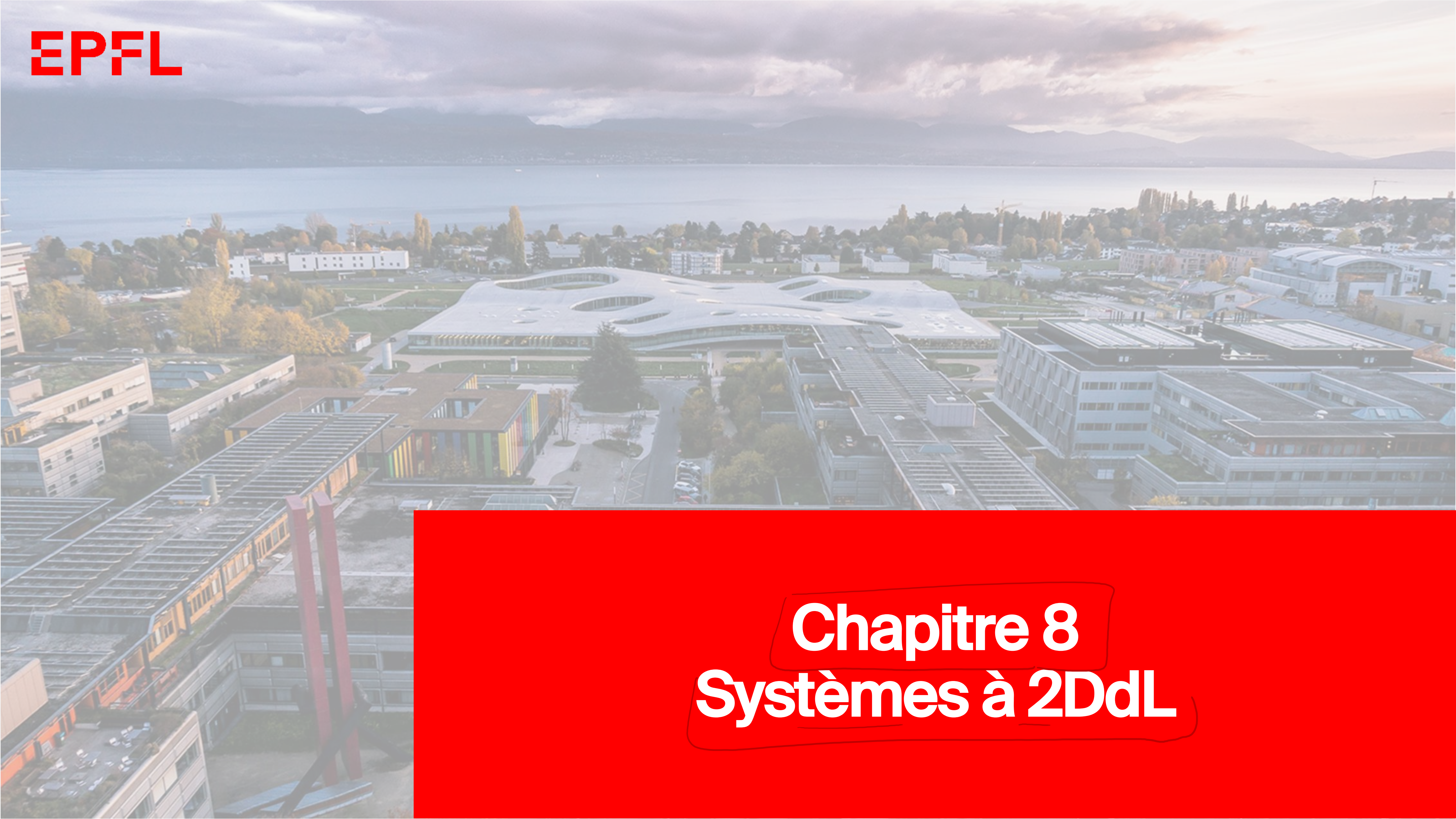
Systemes avec 2DdL

- Libres et Conservatifs -

ME-332 – Mécanique Vibratoire

Prof. Guillermo Villanueva

- Systèmes à 2DdL
- Équations de mouvement
- Régime libre conservatif
- Mode propre
- Systèmes symétriques



Chapitre 8

Systemes à 2DdL

EPFL 2 degrés de liberté – Régime libre

Coordonnées généralisées d'un système à deux degrés de liberté

$x_1(t)$ et $x_2(t)$

→ Résolution directe

→ Découplage → Résolution

Forme canonique du régime libre de l'oscillateur à deux degrés de liberté

$m_{11}\ddot{x}_1 + c_{11}\dot{x}_1 + k_{11}x_1$	$+ m_{12}\ddot{x}_2$	$+ c_{12}\dot{x}_2$	$+ k_{12}x_2 = 0$
$m_{22}\ddot{x}_2 + c_{22}\dot{x}_2 + k_{22}x_2$	$+ m_{21}\ddot{x}_1$	$+ c_{21}\dot{x}_1$	$+ k_{21}x_1 = 0$
Termes propres	Couplage inertiel	Couplage résistif ou visqueuse	Couplage élastique

EPFL 2 degrés de liberté – Régime libre

FORME MATRICIELLE DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} ; \quad \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} ; \quad \ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}$$

Forme canonique matricielle du régime libre de l'oscillateur à deux degrés de liberté

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8.2)$$

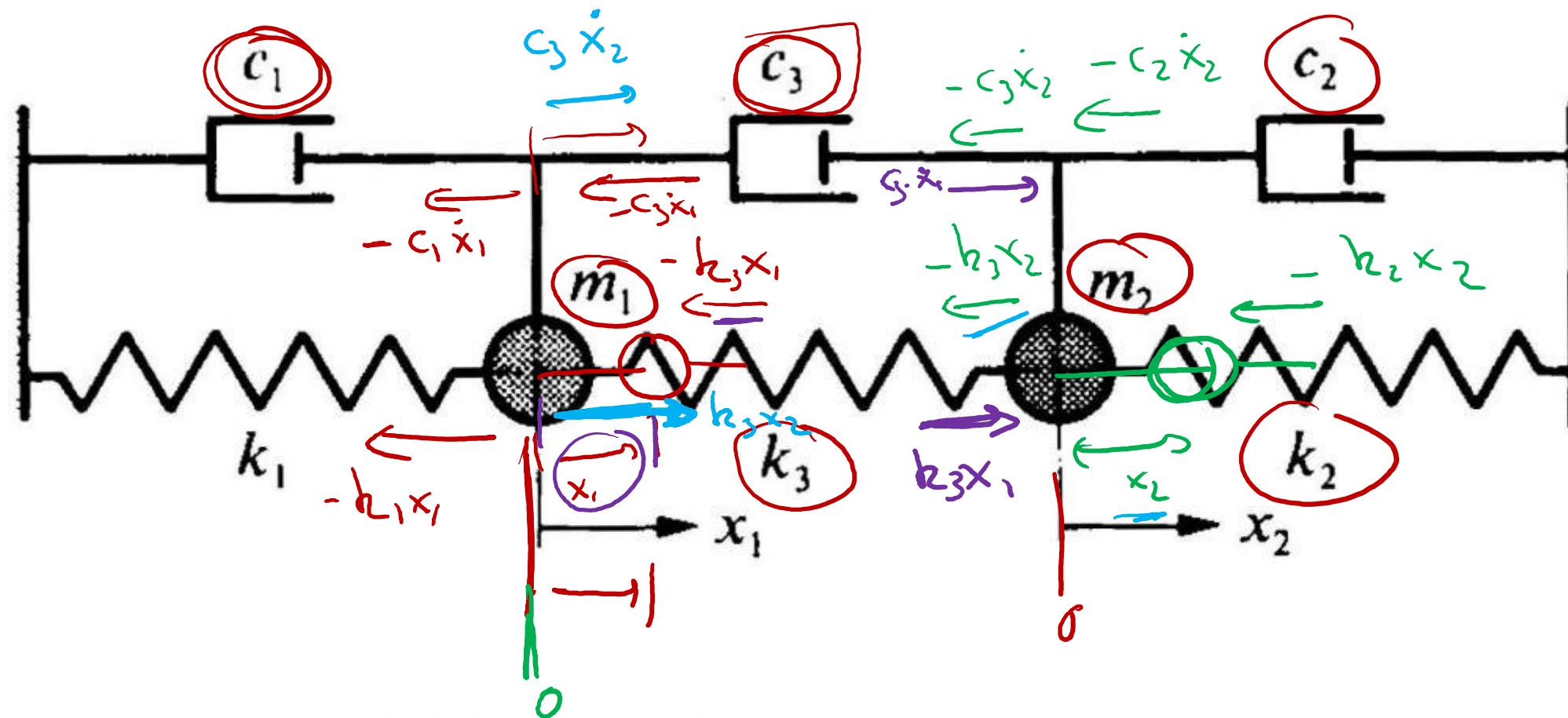
ou en écriture condensée

$$\boxed{[M]\ddot{\vec{x}} + [C]\dot{\vec{x}} + [K]\vec{x} = \mathbf{0}} \quad (8.3)$$

$\vec{x}$	vecteur des déplacements
$\dot{\vec{x}}$	vecteur des vitesses
$\ddot{\vec{x}}$	vecteur des accélérations
$[M]$	<u>matrice des masses</u>
$[C]$	<u>matrice d'amortissement</u>
$[K]$	<u>matrice de rigidité</u>

EPFL Régime libre – 2 degrés de liberté

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME SANS COUPLAGE INERTIEL



Equations de Newton d'un oscillateur à deux degrés de liberté sans couplage inertiel

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_3 (x_1 - x_2) - c_1 \dot{x}_1 - c_3 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - k_3 (x_2 - x_1) - c_2 \dot{x}_2 - c_3 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases}$$

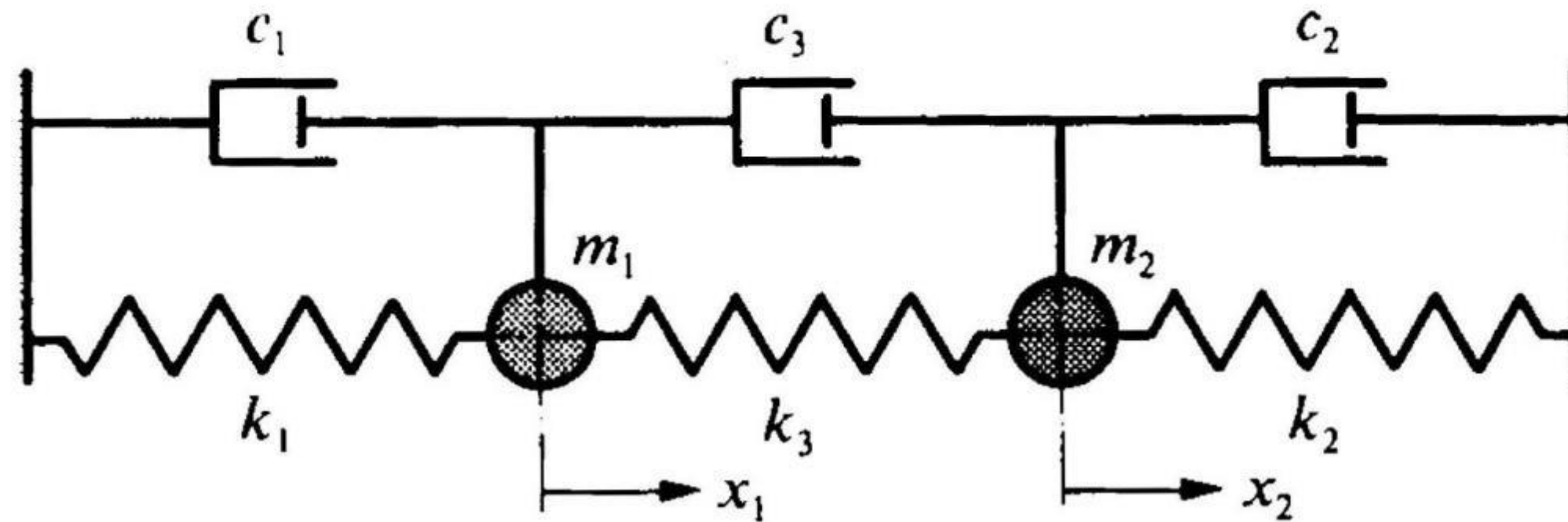
→ Termes propres pour ①
→ Termes propres pour ②

$$m_1 \ddot{x}_1 = \underbrace{-k_1 x_1 - k_3 x_1 - c_1 \dot{x}_1 - c_3 \dot{x}_1}_{\text{Termes propres pour ①}} + \underbrace{c_3 \dot{x}_2 + k_3 x_2}_{\text{Termes propres pour ②}}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = \underbrace{-k_2 x_2 - k_3 x_2 - c_2 \dot{x}_2 - c_3 \dot{x}_2}_{\text{Termes propres pour ②}} + \underbrace{k_3 x_1 + c_3 \dot{x}_1}_{\text{Termes propres pour ①}}$$

EPFL Régime libre – 2 degrés de liberté

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME SANS COUPLAGE INERTIEL



Régime libre du système (sans couplage inertiel)

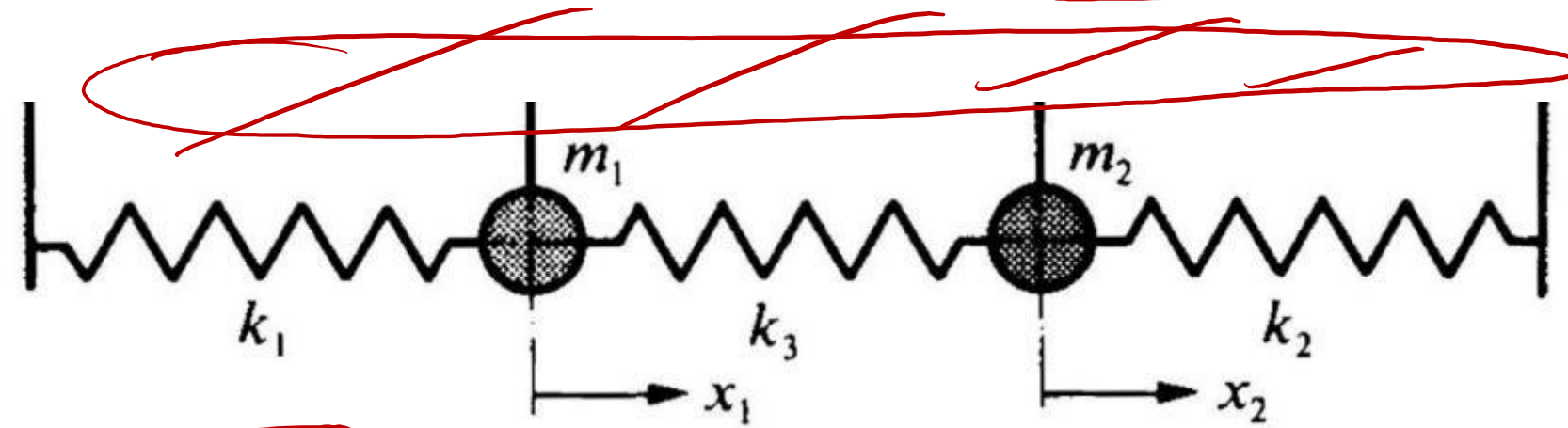
$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_3) \dot{x}_1 + (k_1 + k_3) x_1 - c_3 \dot{x}_2 - k_3 x_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 + (k_2 + k_3) x_2 - c_3 \dot{x}_1 - k_3 x_1 &= 0 \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_3 & -c_3 \\ -c_3 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

EPFL Régime libre et conservatif – 2 degrés de liberté



$$[C] = 0$$

$$[M] = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}; [K] = \begin{pmatrix} k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_2 + k_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{M}\ddot{\underline{x}} + \underline{K}\underline{x} = \underline{0}$$

Solutions générales du régime libre de la forme

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_3)x_1 - k_3 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_3 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = 0 \end{cases} \quad (8.6)$$

$$\underline{\vec{x}} = \underline{\vec{A}}e^{pt} \rightarrow \begin{cases} x_1 = A_1 e^{pt} \\ x_2 = A_2 e^{pt} \end{cases}$$

$$\dot{\underline{x}} = p \cdot \underline{\vec{A}} e^{pt}$$

$$\ddot{\underline{x}} = p^2 \underline{\vec{A}} e^{pt}$$

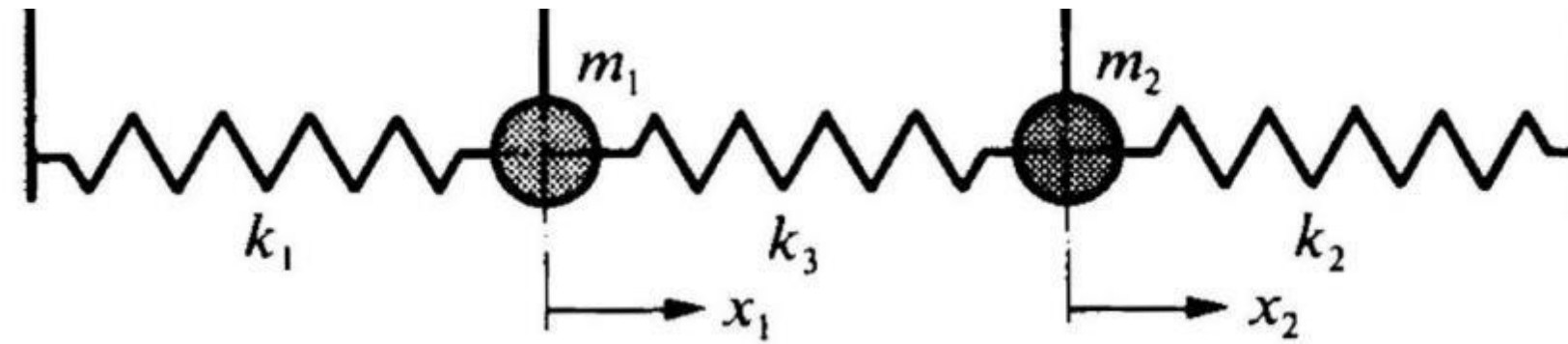
Intégration des solutions générales dans les équations différentielles

$$\underline{M}p^2 \underline{A}e^{pt} + \underline{K}\underline{A}e^{pt} = 0 \rightarrow (\underline{M}p^2 + \underline{K})\underline{A}e^{pt} = 0 \rightarrow (\underline{M}p^2 + \underline{K})\underline{A} = 0$$

$$\det(\underline{M}p^2 + \underline{K}) = 0$$

$$mp^2 + k$$

EPFL Régime libre et conservatif – 2 degrés de liberté



ω_1, ω_2
 $\downarrow$ $\downarrow$
 leçon 2 leçon 3

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}e^{pt}$$

$$\det(\mathbf{M}p^2 + \mathbf{K}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} m_1 p^2 + k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & m_2 p^2 + k_2 + k_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (8.8)$$

$$(m_1 p^2 + k_1 + k_3)(m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_3^2 = 0$$

$$p^2 = -\left(\frac{k_1 + k_3}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_3}{m_1} - \frac{k_2 + k_3}{m_2}\right)^2 - 4 \frac{k_3^2}{m_1 m_2}}$$

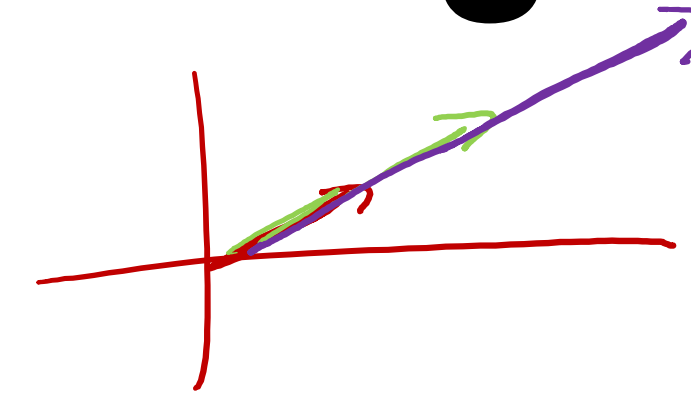
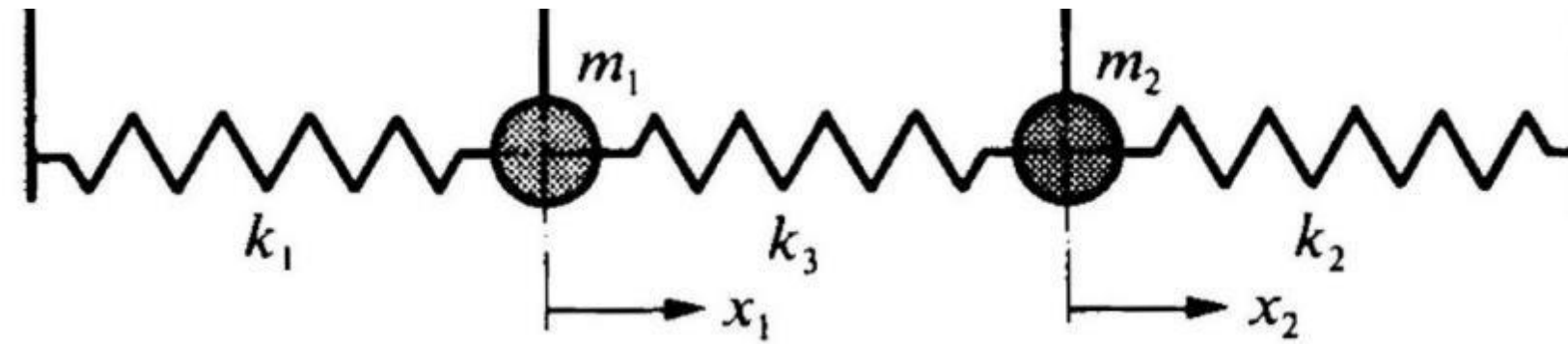
Equation caractéristique ou équation aux pulsations propres

Solutions (imaginaires pures) de l'équation caractéristique

$$p^4 + p^2 \left(\frac{k_1 + k_3}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2} \right) + \frac{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1}{m_1 m_2} = 0 \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned} p_I &= \pm j\omega_I \\ p_{II} &= \pm j\omega_{II} \end{aligned}$$

EPFL Régime libre et conservatif – 2 degrés de liberté



$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}e^{pt} \quad \det(\mathbf{M}p^2 + \mathbf{K}) = 0$$

$$p_I = \pm j\omega_I \leftarrow$$

$$p_{II} = \pm j\omega_{II} \leftarrow$$

Amplitudes des solutions du régime libre définies
à un facteur près

$$(\omega_i^2 \mathbf{M} - \mathbf{K})\mathbf{A}_i = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{A}_I = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_{21} \end{bmatrix} X_1$$

$$\mathbf{A}_{II} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_{22} \end{bmatrix} X_2$$

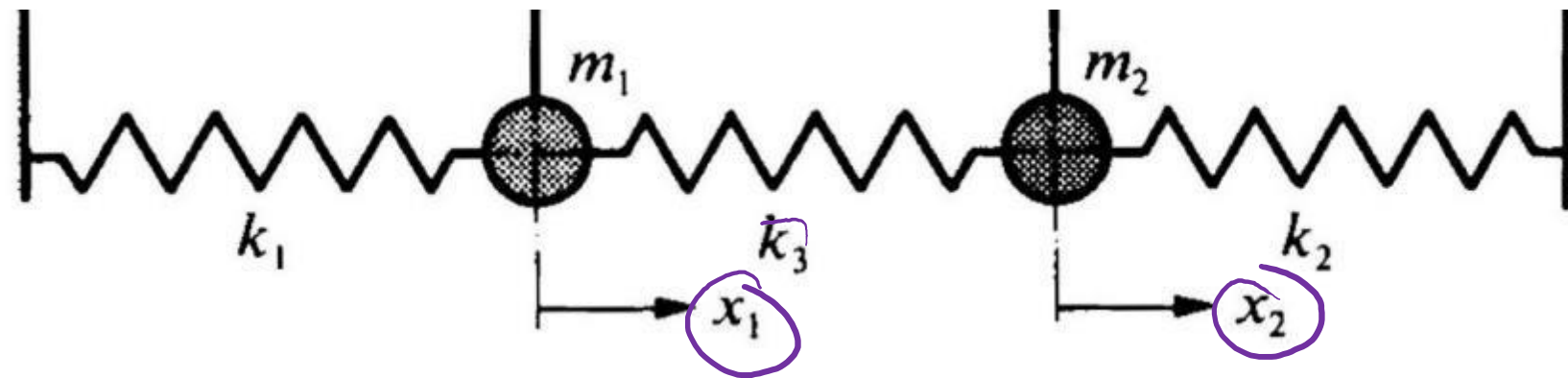
$$(\omega_I^2 \mathbf{M} - \mathbf{K}) \vec{A}_I = 0$$

$$(\omega_{II}^2 \mathbf{M} - \mathbf{K}) \vec{A}_{II} = 0$$

$$\beta_{21} = \frac{k_1 + k_3 - m_1 \omega_1^2}{k_3} = \frac{k_3}{k_2 + k_3 - m_2 \omega_1^2} = \frac{A_{21}}{A_{11}}$$

$$\beta_{22} = \frac{k_1 + k_3 - m_1 \omega_2^2}{k_3} = \frac{k_3}{k_2 + k_3 - m_2 \omega_2^2} = \frac{A_{22}}{A_{12}} \quad (8.11)$$

EPFL Régime libre et conservatif – 2 degrés de liberté



Solutions générales du régime libre

$$\begin{aligned} \overline{x_1} = & A_{11} (C_1 e^{j\omega_1 t} + D_1 e^{-j\omega_1 t}) \\ & + A_{12} (C_2 e^{j\omega_2 t} + D_2 e^{-j\omega_2 t}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{x_2} = & A_{21} (C_1 e^{j\omega_1 t} + D_1 e^{-j\omega_1 t}) \\ & + A_{22} (C_2 e^{j\omega_2 t} + D_2 e^{-j\omega_2 t}) \end{aligned} \quad (8.12)$$

Solutions particulières du régime libre

pour $\overline{x_1}$: $A_{11} e^{j\omega_1 t}$, $A_{11} e^{-j\omega_1 t}$, $A_{12} e^{j\omega_2 t}$, $A_{12} e^{-j\omega_2 t}$

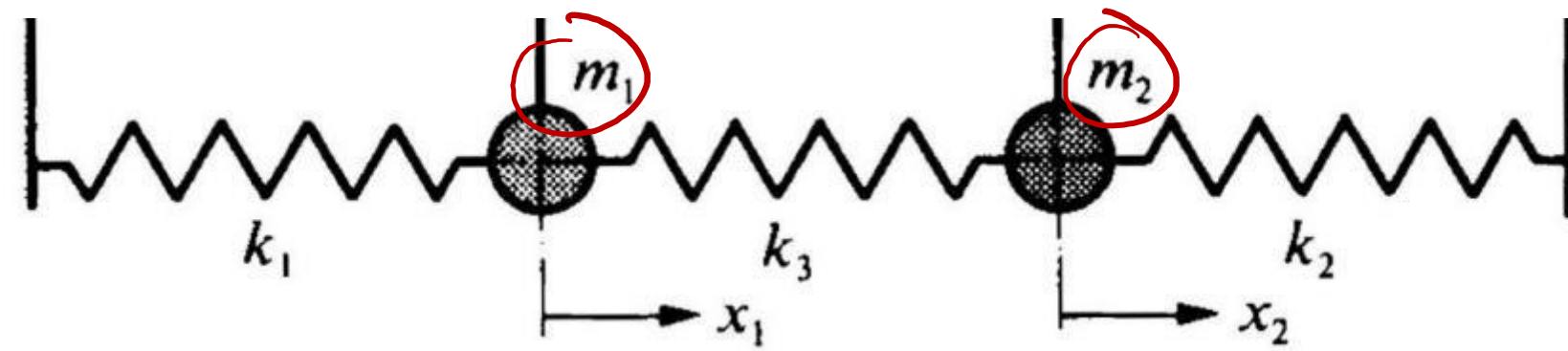
pour $\overline{x_2}$: $A_{21} e^{j\omega_1 t}$, $A_{21} e^{-j\omega_1 t}$, $A_{22} e^{j\omega_2 t}$, $A_{22} e^{-j\omega_2 t}$

Autre forme des solutions générales du régime libre

$$\begin{aligned} \overline{x_1} = & X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \\ \overline{x_2} = & \beta_{21} X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \beta_{22} X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \end{aligned} \quad (8.13)$$

Leçon 1

NOTION DE MODE PROPRE



Définition du mode propre d'un système

Un *mode propre* est le *mouvement* du système lié à une *pulsation* ou *fréquence propre*.

$$\vec{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \beta_{21} \end{bmatrix}}_{\text{1er mode}} X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \beta_{22} \end{bmatrix}}_{\text{2ème mode}} X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

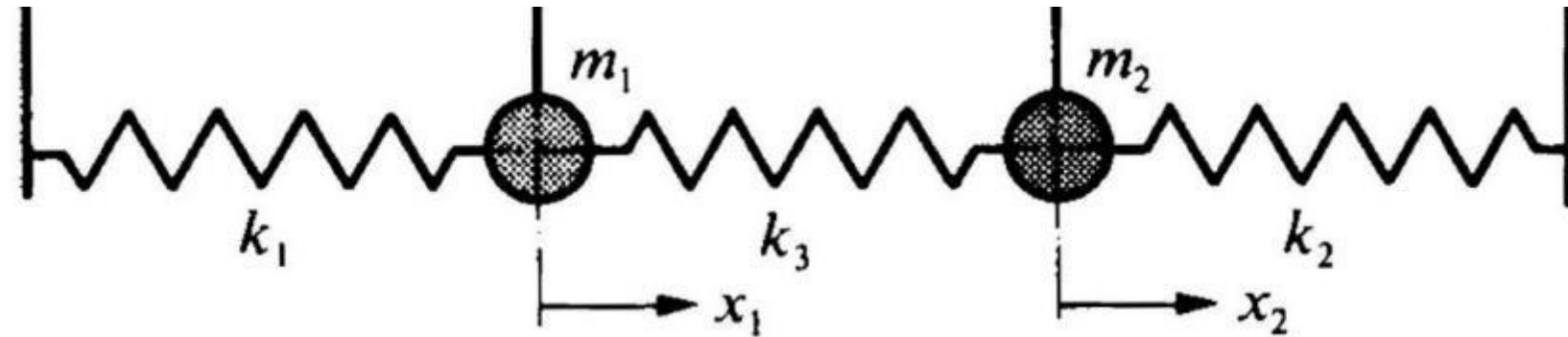
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Forme matricielle des solutions générales du régime libre

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta}_1 X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \boldsymbol{\beta}_2 X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

1^{er} mode

2^{ème} mode (8.14)



Forme matricielle des solutions générales du régime libre

$$\mathbf{x} = \underbrace{\beta_1}_{\text{1er mode}} X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \underbrace{\beta_2}_{\text{2ème mode}} X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \quad (8.14)$$

NOTION DE VECTEUR MODAL

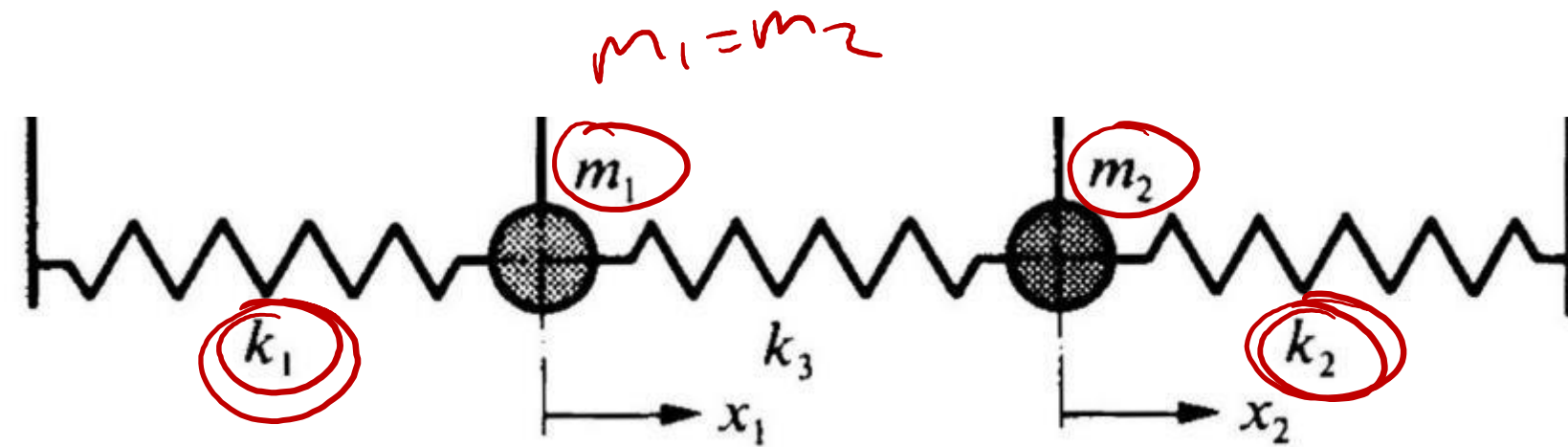
Vecteurs modaux ou vecteurs propres de l'oscillateur

$$\beta_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta_{21} \end{Bmatrix} \quad \beta_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \beta_{22} \end{Bmatrix} \quad (8.15)$$

Orthogonalité des modes propres de l'oscillateur

$$\underbrace{\beta_1^T}_{\uparrow} \underbrace{[M]}_{\uparrow} \underbrace{\beta_2}_{\uparrow} = 0 \quad \underbrace{\beta_1^T}_{\uparrow} \underbrace{[K]}_{\uparrow} \underbrace{\beta_2}_{\uparrow} = 0 \quad (8.16)$$

EPFL Systèmes symétriques



Equation caractéristique pour des systèmes à symétrie géométrique ($m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k$)

$$p^4 + p^2 \frac{2(k + k_3)}{m} + \frac{k^2 + 2k k_3}{m^2} = 0 \quad (8.18)$$

Solutions de l'équation caractéristique

$$p^2 = -\frac{k + k_3}{m} \pm \frac{k_3}{m} \quad (8.19)$$

$$\omega_2^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega_1^2 = \frac{k + 2k_3}{m}$$

$$(M \cdot p^2 + K) \cdot A = 0$$

Pulsations propres du système symétrique

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m} \quad \omega_2^2 = \frac{k + 2k_3}{m} \quad (8.20)$$

Rapports des amplitudes des solutions pour les deux pulsations propres

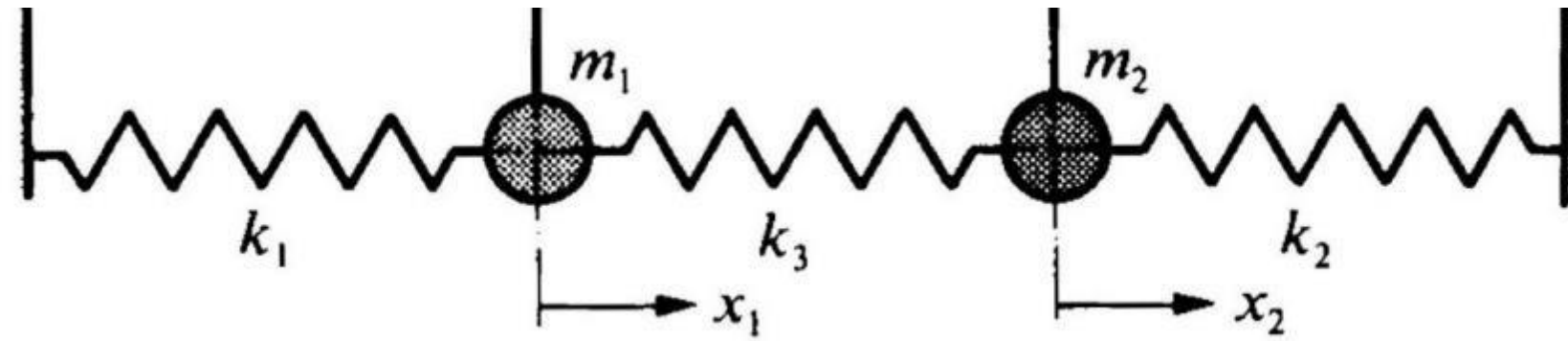
$$\beta_{21} = \frac{k + k_3 - m \omega_1^2}{k_3} = +1$$

$$\beta_{22} = \frac{k + k_3 - m \omega_2^2}{k_3} = -1 \quad (8.21)$$

Vecteurs modaux de l'oscillateur symétrique

$$\beta_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \beta_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

EPFL Systèmes symétriques



$$P_I = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad P_{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solutions générales du régime libre du système symétrique

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \\ x_2 &= X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) - X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \end{aligned}$$

Premier mode du système (oscillations en phase)

$$x_2 = 0$$

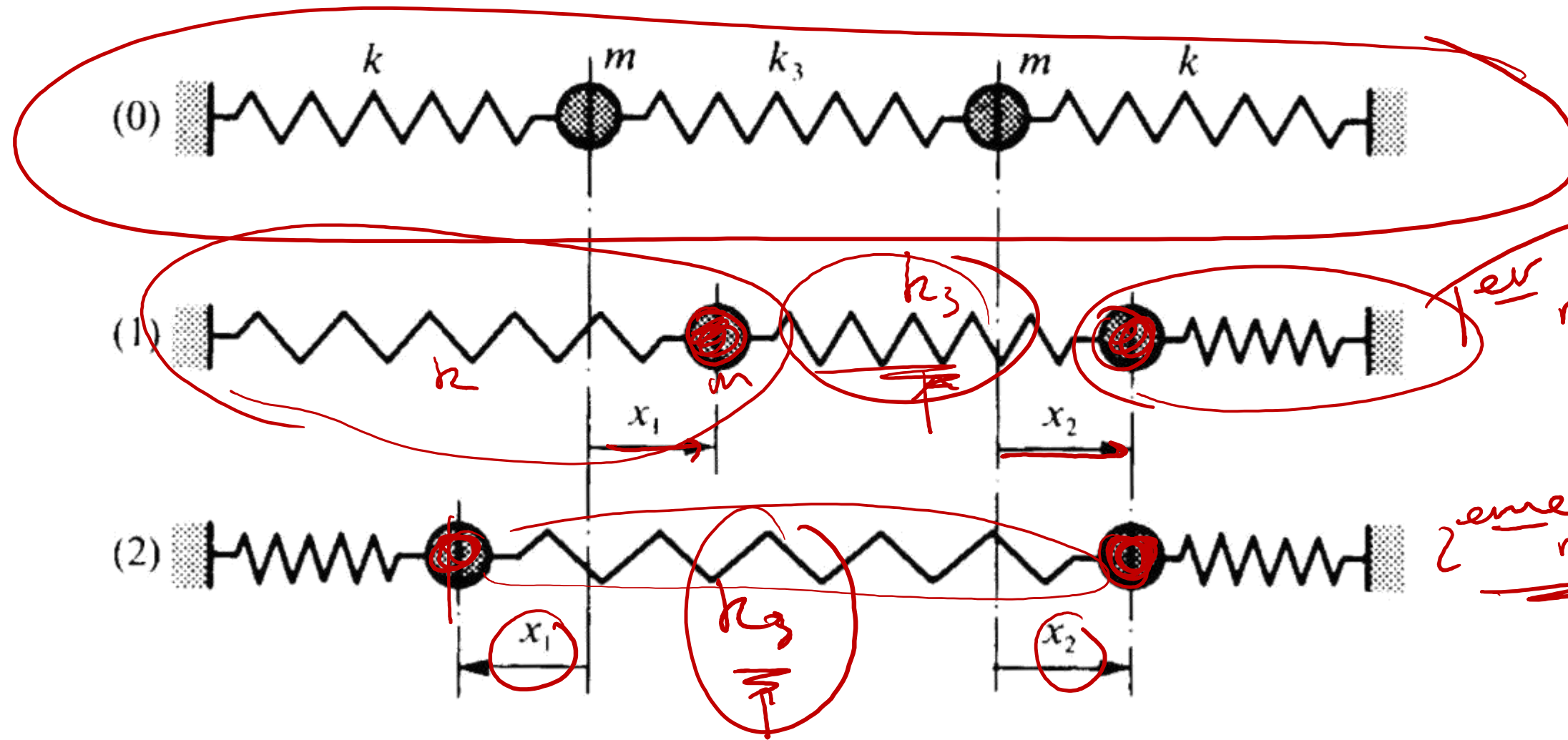
$$x_1 = x_2 = X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) \quad (8.22)$$

Deuxième mode du système (oscillations en opposition de phase)

$$\begin{cases} x_1 = X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \\ x_2 = -X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \end{cases} \quad (8.23)$$

$$x_1 = -x_2$$

EPFL Systèmes symétriques



$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Premier mode du système (oscillations en phase)

$$x_1 = x_2 = X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) \quad (8.22)$$

Deuxième mode du système (oscillations en opposition de phase)

$$\begin{cases} x_1 = X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \\ x_2 = -X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \end{cases} \quad (8.23)$$

